专题综述

害虫综合防治建模驱动“半连续动力系统理论”兴起

陈兰荪[1,2]，程惠东[3]

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院，北京 100190；
2. 闽南科技学院，福建 泉州 362332；3. 山东科技大学 数学与系统科学学院，山东 青岛 266590)

摘　要：以害虫综合防治数学建型为启迪，对生物数学研究的一些相关问题开展了一系列的研究. 从实际问题出发，我们分别建立了“常微分方程模型”以及对应的“周期脉冲控制模型”；随着害虫综合防治常态化管理和环境污染常态化防治的兴起，我们建立了“状态脉冲反馈控制系统”模型，简称“半连续动力系统”模型，提出了“半连续动力系统”相关的概念，创建了其基本理论，并且作了系统性的研究，例如：半连续动力系统的周期解以及周期解的稳定性、同宿轨和同宿分支、异宿轨和异宿分支以及“双边控制系统”等概念及其判定定理的研究；进一步将“半连续动力系统”相应的理论和方法应用于生物数学其他方面的一些相关问题的研究. 本文以数学模型为载体，归纳总结了近十多年来对生物数学的研究历程，指出了当前研究中尚待解决的问题.

关键词：害虫综合防治数学模型；状态脉冲反馈控制系统；周期解；稳定性；同宿轨和同宿分支

中图分类号：O175　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2095-3070(2021)01-0001-16

DOI：10.19943/j.2095-3070.jmmia.2021.01.01

1　控制害虫方法的几类数学模型

数学模型是能够表现和描述真实世界某些现象、特征和状况的数学系统，由于其能定量地描述生命物质运动的过程，从而可以将一个复杂的生物学问题转变成一个数学问题，通过对数学模型的逻辑推理、求解和运算，获得对生物现象客观规律的解释，达到对生命现象进行研究的目的. 生物数学是生物学与数学之间的边缘学科，是在生物学的不同领域中应用数学工具对生命现象进行研究的学科. 它以数学方法研究和解决生物学问题，并对与生物学有关的数学方法进行理论研究. 其一般方法是建立被研究对象的数学模型并对其进行定性和定量研究，主要应用的数学方法有：微分方程、线性代数、概率论和数理统计、抽象代数、拓扑学以及突变理论等，电子计算机的发展使生物数学的研究又有了新的突破.

在世界范围内，害虫对农业的威胁与日俱增. 如何减少害虫对农作物和重要植被的危害，保护人类的粮食安全和生态环境，在农业发展中有效控制害虫数量已经成为重要问题之一. 本文以害虫防治为例，阐述我们研究生物数学的起源及其部分发展.

收稿日期：2021-02-22

基金项目：国家自然科学基金(12071407)

通讯作者：陈兰荪，E-mail：lschen@mail.amss.ac.cn

引用格式：陈兰荪，程惠东. 害虫综合防治建模驱动“半连续动力系统理论”兴起[J]. 数学建模及其应用，2021，10(1)：1-16.

CHEN L S，CHENG H D. Modeling of integrated pest control drives the rise of "semi-continuous dynamical system theory" (in Chinese)[J]. Mathematical Modeling and Its Applications，2021，10(1)：1-16.

1.1 连续捕杀害虫的数学模型

1976年，受C.W.Clark著作《Mathematical Bioeconomics：The Optimal Management of Renewal Resources》的影响，我们开始研究农、林业害虫的综合防治问题. 书中描述防治害虫控制的数学模型如下：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = ay - bx - \alpha x, \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = cx - dy - \beta y, \end{cases} \tag{1}$$

其中：x 表示幼年种群密度；y 表示成年种群密度；a 表示害虫成年的出生率；c 表示害虫幼年到成年的转化率；b 和 d 分别表示害虫的幼年和成年的自然死亡率；α 和 β 分别表示害虫幼年和成年被杀死率. 一般地，模型(1)可表示如下数学模型.

1)连续捕杀害虫阶段结构数学模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x, y) - \alpha x, \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = g(x, y) - \beta y, \end{cases} \tag{2}$$

其中，$f(x, y)$，$g(x, y)$为连续函数. 数学模型(2)表明：控制害虫的方式是连续捕杀，这种模型只适合于灯光诱捕和气味诱捕器捕杀害虫的控制方式，而这种方式不能大量地灭杀害虫，适用于果林或者生态菜园，被称为生物防治害虫.

2)连续释放天敌来捕杀害虫的数学模型

在农业中常常利用释放天敌来捕杀害虫的方法，以达到控制害虫数量的目的. 为此建立了如下捕食数学模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x, y), \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = g(x, y) + p, \end{cases} \tag{3}$$

其中：x 表示害虫的密度；y 表示天敌的密度；P 为天敌的增加量. 模型(3)使用背景，如培养金龟子捕食蚜虫.

病毒可使害虫染病，而且染病的病虫还可以传染其他未中毒的害虫. 例如：释放昆虫病毒，使得由于害虫被昆虫病毒感染而使害虫的数量减少. 为此有如下模型(4).

3)连续投放病毒的SI相互作用数学模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}S/\mathrm{d}t = \alpha S - \beta SI - kS, \\ \mathrm{d}I/\mathrm{d}t = \beta SI - \theta I + kS, \end{cases} \tag{4}$$

其中：S 表示害虫的密度；I 表示病毒的密度.

通常，农、林业中常用的方式是喷洒农药消灭害虫，但是喷洒农药，不能是连续地杀灭害虫，而是有季节式地实施喷杀. 例如常规的春天害虫增长季节和秋季害虫繁殖季节打农药杀虫. 这样，微分方程(2)就不能准确描述这一客观现象，为此，从2000年开始我们就把固定时刻脉冲微分方程的理论[1]应用于农、林业害虫综合防治的建模.

1.2 固定时刻脉冲系统研究“植物病虫害的综合治理”的数学模型

正因为数学模型(2)不能够很好地描述用喷洒农药的方式消灭害虫以及描述这种季节式地实施喷杀害虫的方式，由此产生了时间脉冲微分方程，即周期性地捕杀害虫. 此类控制害虫的固定时刻喷洒农药的一般数学模型如下：

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = xp(x, y) \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = yq(x, y) \end{matrix}\right\}, & t \neq k\tau, \\ \left.\begin{matrix} \Delta x = -\alpha x \\ \Delta y = -\beta y \end{matrix}\right\}, & t = k\tau. \end{cases} \tag{5}$$

这里 $\Delta y = y(t^+) - y(t)$，$\Delta x = x(t^+) - x(t)$. 其中：x 表示幼年种群密度；y 表示成年种群密度；τ 表示控制周期，每经过一段时间 τ 喷洒一次农药，使得幼年害虫的密度降为 $(1-\alpha)x$，成年种群密度降为 $(1-\beta)y$，这里 $0<\alpha, \beta<1$. 我们研究了模型(5)的周期解的存在性和稳定性，也就是杀灭害虫或控制害虫需要喷洒农药的强度和操作规律[2-6].

1.2.1　固定时刻投放天敌防治害虫的方法

喷洒一定数量的杀虫剂尽管可以迅速地杀死一部分害虫，但是，长期使用杀虫剂会带来环境的恶化，加速破坏生态平衡等. 为此考虑生物防治害虫，即周期性地释放天敌来捕杀害虫的方法，以达到控制害虫数量的目的. 周期性地投放天敌控制害虫的固定时刻脉冲的一般数学模型如下：

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = p(x,\ y) \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = q(x,\ y) \end{matrix}\right\},\ t \neq k\tau, \\ \left.\begin{matrix} \Delta x = 0 \\ \Delta y = \Upsilon \end{matrix}\right\},\ t = k\tau. \end{cases} \tag{6}$$

其中：x 表示害虫的密度；y 表示天敌的密度；τ 为控制周期，每经过一段时间 τ，释放天敌的数量为 Υ.

使用背景：如培养赤眼蜂定期投放到玉米地捕杀玉米螟.

同样，我们也研究了模型(6)的周期解的存在性和稳定性，也就是灭杀害虫或控制害虫需要释放天敌的强度和操作规律[7-10].

1.2.2　固定时刻投放病毒的数学模型[11]

由于病毒可使害虫染病而且染病的病虫还传染其他未中毒的害虫，因此定期投放病毒，可以达到控制害虫的目的.

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \alpha s - \beta s i \\ \mathrm{d}i/\mathrm{d}t = \beta s i - \theta i \end{matrix}\right\},\ t \neq k\tau, \\ \left.\begin{matrix} \Delta s = -\mathrm{d}s \\ \Delta i = \mathrm{d}s \end{matrix}\right\},\ t = k\tau. \end{cases} \tag{7}$$

其中：s 表示害虫的密度；i 表示病毒的密度；α，β，θ 为正数，α 为害虫的生长率；β 为病毒的传染率；θ 为病毒的死亡率.

研究了模型(7)的周期解的存在性和稳定性，也就是灭杀害虫或控制害虫需要释放病毒的强度和操作规律[11-23].

针对固定时刻脉冲系统研究“植物病虫害的综合治理”，我们得到了一系列的成果，完成了几十篇论文，这些文章也得到了国内外高引用率. 但是当我们到农、林业实地推广时，发现还有许多不足之处：周期性控制害虫，理论上得到了很好的控制，然而实际生活中，害虫发生的时间规律性会有变化，甚至没有发生周期，有的根本没有规律性. 因此固定时刻喷洒农药的操作方法在实际应用中有不足之处，有许多例子可以说明.

例 1　2014 年，内蒙古额济纳旗多个乡镇草场苦豆子遭受“贪夜蛾”虫害侵袭，发生面积 100 万亩，严重发生面积 45 万亩，呈现出“盛夏枯黄”的景象. 草场牧草损失达 1 700 多万公斤，直接经济损失近 700 万元，这种现象 1996 年曾发生过一次，相隔 18 年后毫无规律地又发生.

例 2　2019 年，我国从南至北贪夜蛾虫害大发作. 害虫起初发生在南方广东一带，以前没有发生的记载，害虫引起大片玉米绝收. 随着时间变化，受灾面积不断向北扩散，直到长江边才引起人们重视. 这时才开始投放大量农药控制害虫为时已晚.

以上两个例子说明只用本节建立的固定时刻脉冲系统研究“植物病虫害的综合治理”的模型是不够的，因此，有必要建立依据害虫发展的“状态”控制害虫的模型.

为了解决这个问题，我们建立了状态脉冲微分方程，即依据害虫发展的“状态”而不仅是依据害虫发生的“周期”控制害虫.

1.3　状态依赖脉冲系统研究“植物病虫害的综合治理”

近年来，人工林、次生林与原始林特别是果树园区都建立“护林员”，河道生态管理建成“河长制”，使森林保护、生态安全与环境保护“常态化”，也就是依据“状态”实行保护措施. 为此，我们建立了简称为“半连续动力系统”(semi-continuous dynamic system，SCDS)的“脉冲状态反馈控制动力系统”[24].

由于“半连续动力系统”是由实际问题出发建立的新的系统，没有现成的理论和方法可借鉴，为此，我们参照常微分方程定性理论，对应建立了一套研究脉冲状态反馈控制动力系统的理论.

2 “半连续动力系统”基础理论与研究方法的建立

为了便于说明我们的研究过程，表明常微分方程定性理论与半连续动力系统理论基础理论的区别与联系，用 ODE(ordinary differential equation)表示“常微分方程定性理论”，对应地，半连续动力系统基础理论用 SCDS 表示. 设$P(x, y)$和$Q(x, y)$为连续可微函数，定义数学模型如下.

常微分方程(ODE)的模型如下：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = P(x, y), \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = Q(x, y). \end{cases}$$

对应于半连续动力系统(SCDS)的数学模型如下：

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = P(x, y) \\ \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = Q(x, y) \end{matrix}\right\}, & (x, y) \notin A(x, y), \\ \left.\begin{matrix} x^{+} = \alpha(x, y) \\ y^{+} = \beta(x, y) \end{matrix}\right\}, & (x, y) \in A(x, y). \end{cases} \tag{8}$$

其中，$(x, y) \in \mathbf{R}^2$，分别用$x^{+} = x(t^{+})$，$y^{+} = y(t^{+})$简化式子，且$P(x, y)$，$Q(x, y)$，$\alpha(x, y)$和$\beta(x, y)$都是从$\mathbf{R}^2$映射到$\mathbf{R}^2$的连续函数，$A(x, y) \subset \mathbf{R}^2$表示脉冲集. 对于脉冲集上任意一点$z(x, y) \in A$，映射$I: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$被定义为：

$$z^{+} = I(z) = (\alpha(x, y), \beta(x, y)) = (x^{+}, y^{+}) \in \mathbf{R}^2,$$

z^{+}被称为点z的一个脉冲点.

2.1 轨线段的定义

定义 1 常微分方程(ODE)轨线段(图 1)

设$f(A, t)$为过直线n上点A的 ODE 系统的轨线，若在一定时间T之后又与直线n交于一点B，$f(A, T) = B$，则AB弧段称为这 ODE 系统的一“轨线段”.

定义 2 半连续动力系统(SCDS)阶 1 轨线段(图 2)

记M为脉冲集，N为相集，设相集上过点A的 SCDS 系统中常微分方程的轨线$f(A, t)$，若在一定时间之后又与脉冲集M表示的曲线交于一点A_1，又由点A_1脉冲到相集表示的曲线上一点B，则 SCDS 的阶 1 轨线段为常微分方程的轨线段AA_1及脉冲线A_1B.

注意：轨线$f(A, t)$在与脉冲集相交之前可能先与相集N相交于多个点C_1，C_2，….

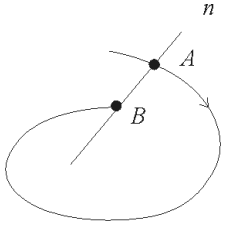
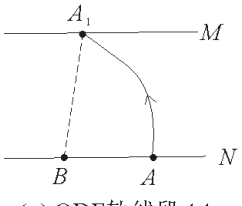
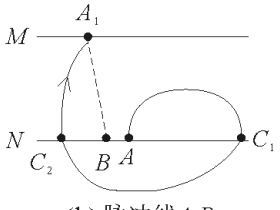


图 1 ODE 轨线段示意图



(a) ODE轨线段AA_1



(b) 脉冲线A_1B

图 2 SCDS 阶 1 轨线段示意图

2.2 后继函数的定义

定义 3[25] ODE(常微分方程)后继函数(图 3)

设$f(A, t)$为过直线n上点A的 ODE 系统的轨线，若在一定时间之后又于直线n上任取一点O，以O为原点建立坐标系，设O、A_0和A的坐标分别为 0、a_0和a，这样，以A_0为A的后继点，点A的 ODE 后继函数为$f_0(A) = a_0 - a$.

定义 4 SCDS(半连续动力系统)阶 1 后继函数(图 4)

在阶 1 轨线段AB的相集N上定义坐标系，设点A坐标为a，点B坐标为b，称B为A的阶 1 后继点，点A的阶 1 后继函数$f_s(A) = b - a$.

注意：阶 1 轨线段AB与相集N可能有多个交点.

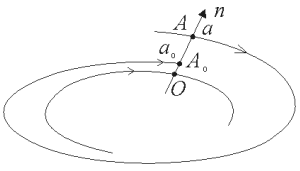
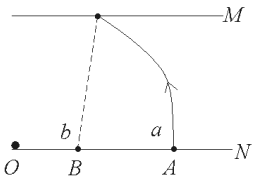


图 3　ODE 后继函数



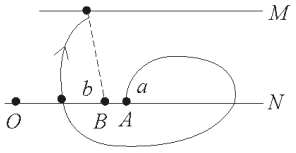
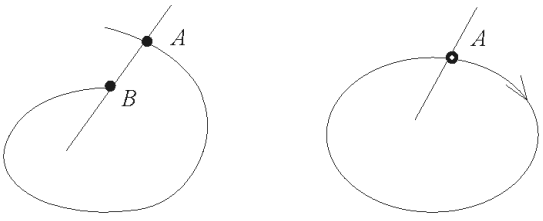


图 4　SCDS 后继函数

2.3　周期解的定义

定义 5[25]　ODE(常微分方程)周期解(极限环)

设 AB 弧段为 ODE 系统的轨线段，当 $A=B$ 时，轨线段 AB 变成周期解 L，即后继函数 $f_0(A)=0$. 若 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 为连续可微函数，则 ODE 系统的周期解 L 为凸闭曲线. 孤立周期解称为极限环.

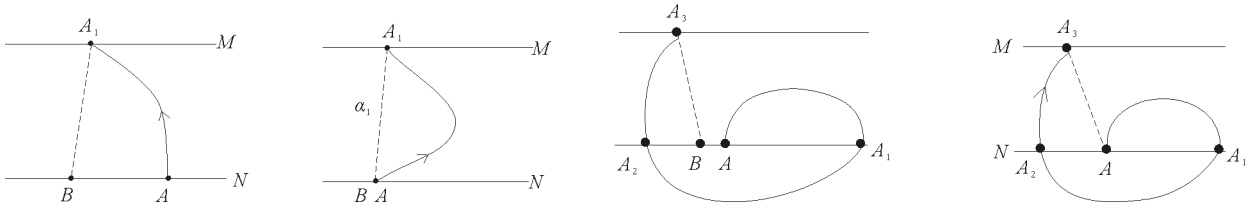


(a) 轨线段　　(b) 周期解

图 5　ODE(常微分方程)周期解示意图

定义 6[26]　SCDS(半连续动力系统)阶 1 周期解

设 AB 弧段称为 SCDS 系统的轨线段，当 $A=B$ 时，阶 1 轨线段变成阶 1 周期解，即后继函数 $f_s(A)=0$. 如图 6 所示.



(a) 阶1轨线段　(b) 阶1周期解　(c) 阶1轨线段　(d) 阶1周期解

图 6　阶 1 周期解示意图

2.4　周期解的特性

2.4.1　ODE(常微分方程)周期解 L 的特点

L 为闭曲线，若：

1)过 L 外任一点 A 的轨线永远保持在 L 的外面；

2)过 L 内任一点 B 的轨线永远保持在 L 的内部，

则 L 为单向接近凸闭周期解，如图 7 所示.

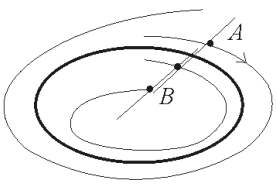


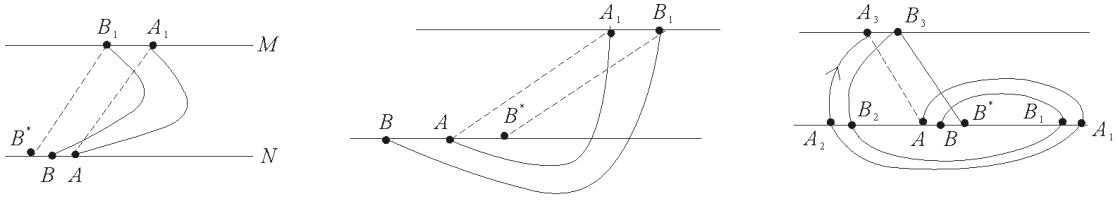
图 7　ODE 周期解 L

2.4.2　SCDS(半连续动力系统)阶 1 周期解的分类

设弧段 AA_1 为阶 1 周期解，对于 A 左边充分小邻域内任意一点 B 出发的阶 1 轨线段 BB_1，点 B^* 仍保留在点 A 的左边，则称 AA_1 为单向接近凸闭阶 1 周期解，如图 8 所示.

图 8(b)的阶 1 周期解 AA_1 不满足上述单向接近条件，则称阶 1 周期解 AA_1 为非单向接近阶 1 周期解.

图 8(c)的阶 1 周期解虽满足上述单向接近条件但非凸，$AA_1A_2A_3$ 称非凸闭单向接近阶 1 周期解.



(a) 单向接近凸闭阶1周期解　(b) 非单向接近的阶1周期解　(c) 非凸闭单向接近阶1周期解

图 8　半连续动力系统阶 1 周期解

2.5 周期解的存在性

2.5.1 周期解存在性判定的后继函数法

2.5.1.1 ODE(常微分方程)周期解的存在性判定的后继函数法

定理 1[25] 在无切线段 OA 上同时存在点 A 和 B，在 OA 上建立坐标系，并设点 O、A 和 B 的坐标分别为 0、a 和 b，点 A 和 B 的后继函数分别为 $f_0(A)>0$ 和 $f_0(B)<0$，则存在周期解，如图 9 所示.

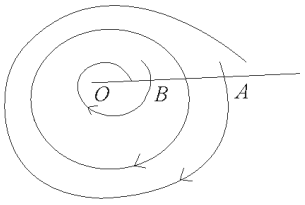


图 9 常微分方程的阶 1 周期解

2.5.1.2 SCDS（半连续动力系统）阶 1 周期解的存在性判定的后继函数法

定理 2[26] 若在相集 N 上存在点 A、点 B 和脉冲参数 α_1，在 N 上建立坐标系，设点 A 的后继点为 A^*，点 B 的后继点为 B^*，点 A 坐标为 a，点 B 坐标为 b，若：

$$f_S^{\alpha_1}(A)<0,\ f_S^{\alpha_1}(B)>0,$$

则 A 与 B 之间必存在一点 C，有 $f_S^{\alpha_1}(C)=0$，即存在阶 1 周期解 C[24, 26-36]，如图 10 所示.

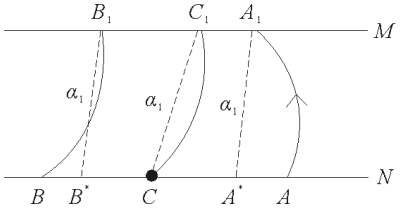


图 10 半连续动力系统的阶 1 周期解

2.5.2 周期解存在性的 Bendixon 环域法

2.5.2.1 ODE（常微分方程)周期解的存在性的 Bendixon 环域法

定义 7[25] 环域 G 的外边界线 Γ_1 和内边界线 Γ_2 均由曲线段或直线段组成边界线 S，微分方程轨线与边界线 S 相交，均由区域 G 外指向 G 内，环域 G 内不存在系统的平衡点，则环域 G 称为 ODE 系统的 Bendixon 环域，如图 11 所示.

定理 3[25] ODE 系统的 Bendixon 环域内必存在 ODE 周期解.

2.5.2.2 SCDS（半连续动力系统)周期解的存在性的 Bendixon 环域法

定义 8[37] 如图 12 所示，存在一个闭区域 G，其中：

1)CD 为脉冲集线段，AB 为相集线段；

2)若干条无切线段(直线段或曲线段)与线段 CD 和 AB 组成一封闭曲线 S 作为闭区域 G 的边界线；

3)系统(2)的微分方程轨线与边界线 S 相交，除脉冲线段 CD 外，均由区域 G 外指向 G 内；

4)环域 G 内不存在系统的平衡点，

则环域 G 称为 SCDS 系统的 Bendixon 环域.

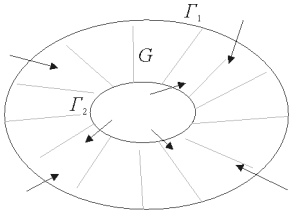


图 11 ODE Bendixon 环域

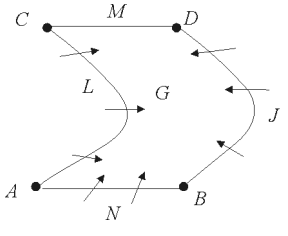


图 12 SCDS Bendixon 环域

定理 4[37] SCDS 系统的 Bendixon 环域 G 内必存在 SCDS 系统的阶 1 周期解.

2.6 ODE 和 SCDS 的同宿轨和同宿分支

2.6.1 ODE（常微分方程）同宿轨及同宿分支[25]定义

1)ODE 同宿轨

ODE（常微分方程)相平面上存在奇点：O 为焦点，N 为鞍点，N 的两条分界线 L^+ 和 L^-. 在一定条件下，L^+ 和 L^- 可以连接形成一环形成轨线，如图 13 所示，其中，$L^+ + N + L^-$ 为同宿轨.

2)ODE 同宿分支

记奇点 O 与奇点 N 的连线 ON 直线的交点为 B，显然在线段 AB 上系统的向量方向为从上向下，

若 O 为稳定焦点，这样，由定理 4 可知 Bendixon 环域存在围绕焦点 O_1 的闭轨线. 如图 14 所示.

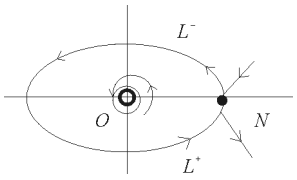


图 13　同宿轨示意图

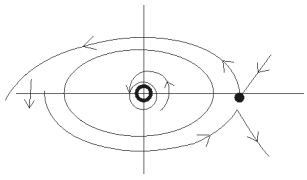


图 14　ODE 同宿分支

2.6.2　SCDS(半连续动力系统)同宿轨和同宿分支

举例来说明 SCDS 系统. 式(9)为具有常量收获的捕食模型：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\dot{x}&=x(a-bx-cy)\\ \dot{y}&=y(rx-d)-F\end{aligned}\right\},\ x>h,\\ \left.\begin{aligned}\Delta x&=\tau\\ \Delta y&=-\beta y\end{aligned}\right\},\ x=h,\end{cases}\tag{9}$$

其中：x 表示养鱼的食物的数量，例如藻类的浓度；y 表示鱼的数量. M 为脉冲集，即 $M=\{(x,y)|x=h,y\geqslant 0\}$，$N$ 为相集：$N=\{(x,y)|x=h+\tau,y\geqslant 0\}$.

1)SCDS 同宿轨[39-45]

SCDS 系统(9)的微分方程，在相平面上有两个奇点 H 和 R，其中：H 为鞍点，R 为焦点. 鞍点 H 的不稳定分界线 L^- 与脉冲集 M 交于点 A，H 的稳定分界线 L^+ 与相集 N 交于点 B，选择适当的脉冲参数 β，使点 A 脉冲的相点正好为 B，这样，HL^-ABL^+H 构成一个“SCDS 同宿轨”. 如图 15 所示.

2)SCDS 同宿分支

适当改变脉冲参数 β 为 β_1，满足 $0<\beta_1<\beta$ 且 $\beta-\beta_1\ll 1$，对于脉冲参数 β_1，点 A 脉冲的相点为 D，这样 HL^-DBL^+H 构成一个环域，并设这环域内没有其他的奇点，则这环域成为 Bendixon 环域. 因此其内存在 SCDS 阶 1 周期解. 如图 16 所示.

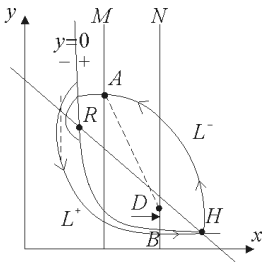


图 15　SCDS 同宿轨

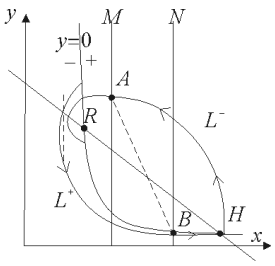


图 16　SCDS 同宿分支

2.7　异宿轨和异宿分支

2.7.1　ODE (常微分方程)异宿轨与异宿分支[25]

1)ODE 异宿轨

ODE(常微分方程)相平面上存在奇点：设 R 为焦点，N_1 和 N_2 为鞍点，N_1 的两条分界线 L_1^+ 和 L_1^-，N_2 的两条分界线 L_2^+ 和 L_2^-，在一定的条件下能使 L_2^- 与 L_1^+ 相连接，而且同时使 L_1^- 与 L_2^+ 相连接. 这样就形成了一个闭环路，$N_2L_2^-L_1^+N_1L_1^-L_2^+$ 即为 ODE 异宿轨，记为 $\Gamma_{N_1N_2}$. 如图 17 所示.

2)ODE 异宿分支

设异宿轨 $\Gamma_{N_1N_2}$ 内有唯一的奇点 $R(x^*,y^*)$ 为稳定焦点. 异宿轨 $\Gamma_{N_1N_2}$ 在一定的扰动下，环形轨线会破裂，设扰动后 L_2^- 和 L_1^+ 与 $x=x^*$ 的交点分别为 A 和 B，由向量场方向可知，在 AB 线段上向量场方向是由右向左，又 R 为稳定焦点，这就构成一个 Bendixon 环域，因此环域内存在周期解(极限环). 如图 18 所示.

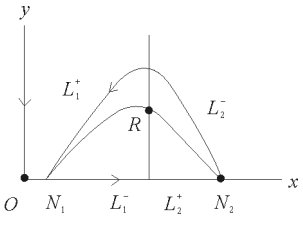


图 17　ODE 异宿轨

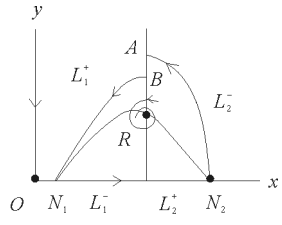


图 18　ODE 异宿分支

2.7.2　SCDS (半连续动力系统)异宿轨与异宿分支[45-46]

1)SCDS 异宿轨

以 SCDS 系统(10)为例来说明 SCDS 异宿轨：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t&=r(x-\theta)(1-x/k)-qxy/(1+qhx)\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t&=aqy(x-b)/(1+qhx)\end{aligned}\right\},\ y<\tau,\\ \left.\begin{aligned}\Delta x&=-\alpha x\\ \Delta y&=-\beta y\end{aligned}\right\},\ y=\tau,\end{cases}\tag{10}$$

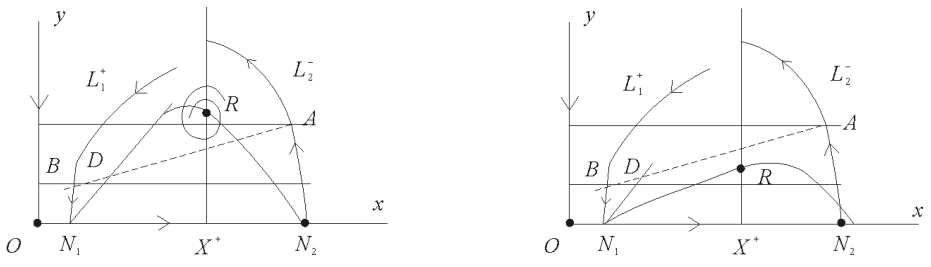
其中：x 为食饵种群密度；y 为捕食者种群密度，食饵种群为 Allee 效应增长率.

SCDS 系统(10)的微分方程在相平面上仅有 3 个奇点N_1、N_2和 R，其中N_1、N_2为鞍点，R 为稳定焦点，N_1的不稳定分界线和N_2的稳定分界线重合在 x 轴上，N_2的不稳定分界线和脉冲线交于一点 A，N_1不稳定分界线和相集线交于一点 B，寻找一个脉冲参数 β_0，使得 A 点的脉冲相点正好是 B，这样我们就得到一个环线$N_2AB\ N_1N_2$即为所求的 SCDS 异宿轨.

2)SCDS 异宿分支

SCDS 异宿轨中已寻找到一个脉冲参数 β_0，在这个脉冲参数系统(10)存在一个 SCDS 异宿轨 $N_2ABN_1N_2$，在此基础上再遵行参数扰动寻找另一参数 β_1 满足 $0<\beta_1<\beta_0$，$\beta_0-\beta_1\ll 1$.

对于脉冲参数β_1，点 A 的脉冲相点为 D，D 点在点 A 的右边，由相图可以看出，在线段上向量场的方向是由上指向下，以下两种情况都可构成 Bendixon 环域，见图 19.



(a) SCDS异宿分支1　　(b) SCDS异宿分支2

图 19　SCDS 异宿分支

注：1)奇点 R 在脉冲线 AD 的上方；2)奇点 R 在脉冲线下方，R 是稳定焦点.

2.8　Poincaré 分支

2.8.1　ODE（常微分方程）系统 Poincaré 分支

以 ODE 系统(11)为例来说明：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-y-\varepsilon x(x^2+y^2-1-\varepsilon),\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=x-\varepsilon y(x^2+y^2-1-\varepsilon),\end{cases}\tag{11}$$

作极坐标变换得：

$$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=-\varepsilon r(r^2-1-\varepsilon),\ \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=1.$$

当 $\varepsilon=0$ 时，$(0,0)$ 为中心型奇点，Γ 也是中心型一系列闭轨中的一个；当 $\varepsilon>0$ 时，Γ 仍保持是闭轨，Γ：$r^2=1+\varepsilon$ 为唯一闭轨，是一个极限环，是扰动产生的稳定极限环. 如图 20 所示.

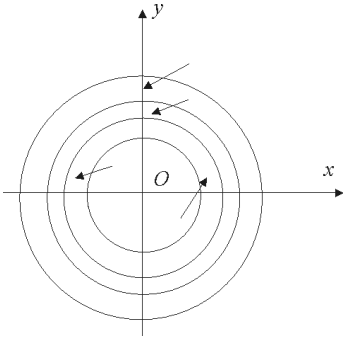


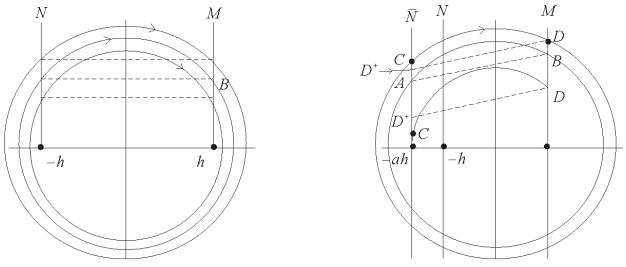
图 20　ODE 系统 Poincaré 分支

2.8.2　SCDS 系统 Poincaré 分支

以 SCDS 系统(12)为例来说明：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t&=y\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t&=-x\end{aligned}\right\},\ x<h,\\ \left.\begin{aligned}x^+&=-ah\\ y^+&=by\end{aligned}\right\},\ x=h,\end{cases}\tag{12}$$

脉冲集 M 不动，相集 N 向左作微小移动，也即 a 由 $a=1$ 改变为$a_2>1$，则必存在 $b_2>1$，使得阶 1 周期解 AB 仍保持为阶 1 周期解，且 A 仍为 B 的相点. 这样，a_2 和 b_2 脉冲函数仅保持 AB 为阶 1 周期解. 其他的阶 1 周期解 CD 等均破裂. 可以证明 AB 是轨线不稳定的. 如图 21 所示.



(a) $a=1, b=1$ 中心型　　(b) $a>1, b>1$ 不稳定环

图 21　SCDS 系统 Poincaré 分支

2.9　周期解稳定性的判定理论

2.9.1　ODE（常微分方程）周期解（极限环）的稳定性

设 Γ 为系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x, y), \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = g(x, y) \end{cases} \tag{13}$$

的周期解，则 Γ 必为凸闭曲线. 在 Γ 上任取一点 O，过 O 做闭曲线 Γ 的法线 On，以 O 为原点，On 为纵轴，Γ 在 O 点的切线 Os 为水平轴建立移动坐标系.

引理　若在法线 On 上闭轨线的外部（内部）存在一个开区间 $(0, \varepsilon)$，使得在 $(0, \varepsilon)$ 内任意一点 A，过 A 的后继函数均有 $f(A)<0$，则闭轨线 Γ 为外稳定（内稳定），如图 22 所示.

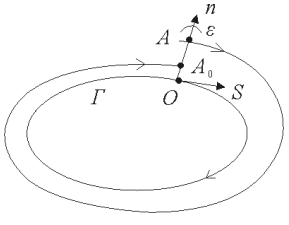


图 22　极限环的稳定性

定理 5[25]　若闭轨线 Γ 的周期为 T，且成立 $\int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}t<0$，$(>0)$，则 Γ 为稳定（不稳定）极限环.

2.9.2　SCDS 系统单向接近凸闭阶 1 周期解的稳定性

考虑 SCDS 脉冲系统：

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t &= P(x, y) \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t &= Q(x, y) \end{aligned}\right\}, & y < y^*, \\ \left.\begin{aligned} \Delta x &= -\alpha x \\ \Delta y &= -\beta y \end{aligned}\right\}, & y = y^*, \end{cases} \tag{14}$$

设 SCDS 系统(14)有一个单侧渐近型阶 1 周期解 Γ，Γ 的周期为 T，其轨线如图 23 所示. 把脉冲线 AB 改为 A 和 B 两点的连线，利用 $A(a, y_A)$、$B(b, y_B)$ 构造一个切换系统(14)以之为闭轨线 Γ_n：

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t &= P(x, y) \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t &= Q(x, y) \end{aligned}\right\} \text{初值在相集 } N \text{ 上}, \\ \left.\begin{aligned} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t &= (b-a)nh/T = P_1(x, y) \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t &= n(y_A - y_B)/T = Q_1(x, y) \end{aligned}\right\} \text{初值在脉冲集 } M \text{ 上}. \end{cases}$$

系统(14)的周期解 Γ_n 是一连续的凸闭轨线，其稳定性就可以用上述 ODE 系统相类似的“移动坐标系”的方法，如图 24 所示. 由此得到如下定理：

定理 6[25]　若系统(14) 在周期轨线 Γ_n 上成立 $\int_0^{T+\frac{T}{n}} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}t<0$，则 Γ_n 为轨线渐近稳定的. 因为当 $n\to\infty$ 时，$\Gamma_n\to\Gamma$ 且 $T/n+T\to T$.

定理 7[27]　半连续动力系统(14)若存在单侧渐近型凸闭阶 1 周期解 Γ，其周期为 T 并且在 Γ 所存在的区域 G 中恒有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}<0,$$

则阶 1 周期解 Γ 为轨线稳定的.

对于一些特殊类型的模型有关单侧渐近型凸闭阶 1 周期解稳定性，也作了一系列的研究，可参考

文献[47-65].

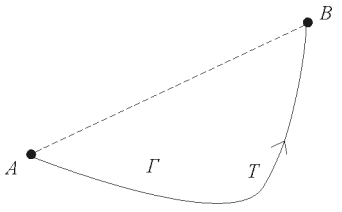


图 23 单侧渐近型阶 1 周期解

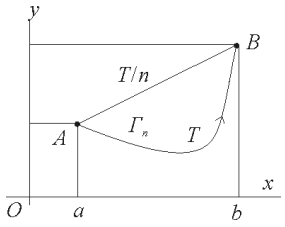


图 24 Γ_n 周期解

3 尚待解决的几个问题

3.1 ODE (常微分方程)极限环不存在性

定理 8(Dulac 定理)[25] 若在单连通区域 G 中，存在一次连续可微定号函数 $B(x, y)$，使 $\frac{\partial}{\partial x}(Bf)+\frac{\partial}{\partial y}(Bg)$保持常号，且不在任何子区域中恒等于零，则 ODE 系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x, y), \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = g(x, y) \end{cases} \tag{15}$$

不存在全部位于 G 中的闭轨线与奇闭轨线. 在 SCDS (半连续动力系统)中尚未得到对应的 Dulac 定理.

3.2 ODE (常微分方程)极限环唯一性定理[25]

已知 Vonderpol 方程的一般形式：$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+x=0$，相应的等价系统为：

$$\begin{cases} \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -x, \\ \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = y-F(x), \end{cases} \tag{16}$$

其中，$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，满足下列条件：

1) $f(x)\in C^0(-\infty,+\infty)$，存在$\delta_{-1}<0<\delta_1$，当$\delta_{-1}<x<\delta_1$时，$f(x)<0$；当 $x<\delta_{-1}$以及 $x>\delta_1$时，$f(x)>0$；

2)存在 $\Delta>0$，$F(\Delta)=F(-\Delta)=0$；

3)$F(+\infty)=+\infty$或 $F(-\infty)=-\infty$，

则 ODE 系统(16)有唯一且稳定的极限环. 在 SCDS (半连续动力系统)研究中尚未得到对应的阶 1 周期解的唯一性定理.

3.3 ODE (常微分方程)极限环的最多个数与相对位置[25]

在 1900 年国际数学家代表大会上，Hilbert 提出了 23 个数学问题，称为希尔伯特数学问题. 其中，ODE (常微分方程)系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = X(x, y), \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = Y(x, y) \end{cases} \tag{17}$$

中，$X(x, y)=\sum_{i+j=0}^{n} a_{i,j}x^i y^j$，$Y(x, y)=\sum_{i+j=0}^{n} b_{i,j}x^i y^j$，$(X(x, y), Y(x, y))$是在 $\mathbf{R}^2$中的 n 次多项式向量场. Hilbert 的第 16 个问题是：微分系统(17)极限环个数的最小上界 $H(n)$是多少？$H(n)=$？微分系统(17)极限环的相对位置如何？

3.4 Petrovaki and Landis 定理

1959 年，莫斯科大学校长 Petrovaki 院士和他的学生 Landis 证明了：微分系统(17)当$(X(x, y), Y(x, y))$是在 $\mathbf{R}^2$中的二次多项式向量场(称为二次多项式微分系统)时，$H(2)=3$. 但是在 1976 年，Petrovaki 的学生发现他们的证明中有个引理有错！陈兰荪和王明淑[63]在 1979 年 11 月找出一个例子证明了 $H(2)\geqslant 4$.

问题：对于一些简单的 SCDS(半连续动力系统)，其阶 1 周期解的最多个数和相对位置尚未解决.

4　SCDS(半连续动力系统)的特有性质

4.1　SCDS(半连续动力系统)的阶 2 轨线段

SCDS(半连续动力系统)有一些独特问题是 ODE 系统不具有的. 设如下数学模型

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t=P(x,\ y)\\&\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t=Q(x,\ y)\end{aligned}\right\},\ y<y^{*},\\&\left.\begin{aligned}&\Delta x=-\alpha x\\&\Delta y=-\beta y\end{aligned}\right\},\ y=y^{*}.\end{aligned}\right.\tag{18}$$

定义 9　阶 2 轨线段

设脉冲集 M，相集 N，由相集 N 上的点 A 出发的轨线与脉冲集交于点 A_1，A_1 脉冲到点 B，脉冲参数为 α_1. 由相集上的点 B 出发的轨线与脉冲集交于点 B_1，B_1 脉冲到点 A_0，脉冲参数同样为 α_1，则 $AA_1BB_1A_0$ 称为阶 2 轨线段. 见图 25.

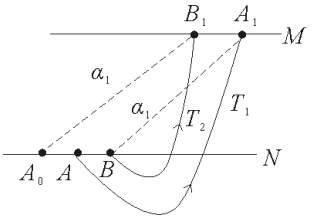


图 25　阶 2 轨线段

设轨线 AA_1 用时间为 T_1，轨线 BB_1 用时间为 T_2，则阶 2 轨线段 $AA_1BB_1A_0$ 用时间为 T_1+T_2.

4.2　SCDS(半连续动力系统)的阶 2 后继函数

定义 10　阶 2 后继点和阶 2 后继函数：点 A_0 称为点 A 的阶 2 后继点记为：$F_2^{\alpha_1}(A)=A_0$.

在相集 N 上建立坐标系，设点 A 的坐标为 a，A_0 的坐标为 a_0，则点 A 的阶 2 后继函数为：$F_2^{\alpha_1}(A)=a_0-a$.

定义 11　阶 2 周期解：如果 $F_2^{\alpha_1}(A)=A_0=A$，也即 $F_2^{\alpha_1}(A)=a_0-a=0$，则 $AA_1BB_1A_0$ 称为阶 2 周期解.

易知，阶 2 周期解 $AA_1BB_1A_0$ 的周期为 T_1+T_2. 如图 26 所示.

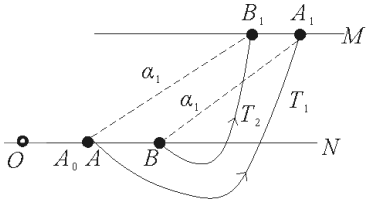


图 26　阶 2 周期解图

注：上述阶 2 轨线段中包含两条 ODE 系统的轨线和两条具有相同脉冲参数的脉冲线. 对应的两条 SCDS 系统的轨线的情况比较复杂，见图 27.

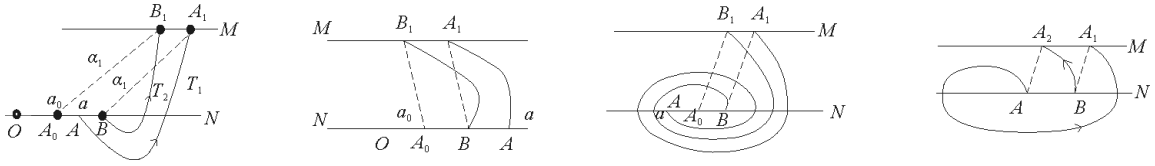
1)两条轨线均与相集有两个交点，称为普通型图，如图 27(a)；

2)两条轨线均与相集有 1 个交点，如图 27(b)；

3)两条轨线均与相集均有 3 个交点，如图 27(c)；

4)两条轨线与相集有 3 个交点，另一条仅 1 个交点，如图 27(d).

如此等等的情况很多，比较复杂. 容易看出这 4 种情况中仅有 1)和 4)可以产生阶 2 周期解.



(a) 二交点图　　(b) 一交点图　　(c) 三交点图　　(d) 四交点图

图 27　SCDS 系统的轨线

定理 9　有阶 2 周期解，必有阶 1 周期解(图 28).

点 A 的阶 1 后继函数 $f_1^{a_1}(A)=b-a>0$，阶 1 轨线段 BB_1A，点 B 的阶 1 后继函数 $f_1^{a_1}(B)=a-b>0$，因此，A 与 B 之间必存在一点 C 的阶 1 后继函数为 $f_1^{a_1}(C)=0$，存在阶 1 周期解.

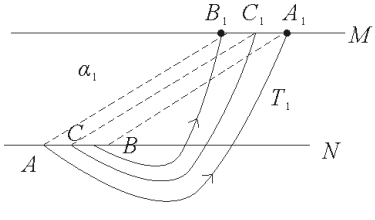


图 28　阶 1 和阶 2 周期解

4.3　SCDS(半连续动力系统)目前待要解决的问题

前面的理论背景是害虫治理模型(14)，控制害虫的单一目标

是保证害虫的数量不可超过经济阈值y^*，即 $y<y^*$，称其为“单边控制系统”.

1)脉冲集为 $y=y^*$ 直线，方程是二维，脉冲集只能是一维，即为直线或曲线(不可有闭分支). 若为曲线，则可通过坐标变换化为直线.

2)这里脉冲函数 $\Delta x=-\alpha x$，$\Delta y=-\beta y$ 均为线性函数，非线性情况怎样？

4.3.1 “双边控制系统”的动力系统

以上以害虫治理模型为控制背景建立了“单边控制”的理论，但是有许多实际问题单边控制是不能解决的. 例如，2015 年有位渔民向我们提出这样一个问题：

这位养鱼户有两个池塘，其中一个大池塘是用于养鱼的，一个小池塘是用于培养鱼食的浮游植物. 养鱼的池塘中如果发现食物(浮游植物)缺少了就要从小池糖中取食加到大池塘中；反之，若大池塘中浮游植物太多，会封死水面，使得大池塘中的鱼缺少空气导致死亡，这时又必须从大池塘中把浮游植物捞出来，这样就发生鱼食捞进和捞出两方向控制.

养鱼户的问题是：养鱼的池塘中这样对鱼食的一加一减，问题在于什么时候加？什么时候减？加多少？减多少？怎样操作能使鱼的产量最多？为此我们建立了以下的数学模型——双边控制系统：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t&=x(r-ax-by)\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t&=y(x-m_1)(m_2-x)\end{aligned}\right\},\ 0<h_1<x<h_2,\ h_1<x(0)<h_2,\\ \left.\begin{aligned}\Delta x&=n_1-h_1\\ \Delta y&=-py\end{aligned}\right\},\ y(0)>0,\ x=h_2,\\ \left.\begin{aligned}\Delta x&=h_2-n_2\\ \Delta y&=fy\end{aligned}\right\},\ x=h_2,\end{cases}\tag{19}$$

其中：$x(t)$表示浮游植物在 t 时刻的密度；$y(t)$表示鱼在 t 时刻的密度.

模型(19)体现了在浮游植物低密度和高密度双向控制，但是对于模型(19)，以前在单向控制研究中所得到的理论在此都失效了. 然而对于这个具体的模型，我们做了一些分析，得到了周期解的存在性[60].

双边控制系统(19)有两个脉冲集 M_1：$x=h_1$和M_2：$x=h_2$，也一定有两个相集N_1：$x=n_1$和N_2：$x=n_2$，满足$h_2>n_2\geqslant n_1>h_1$.

单边控制系统研究中“后继函数”方法是基础工具，对于双边控制系统也要从建立“后继函数”的理论开始. 以模型(19)为例：过相集上点 A 的轨线与脉冲集 M_1 交于 A_1，由 A_1 脉冲到相集 N_1 上一点 A_2，过 A_2 的轨线与脉冲集 M_2 交于 A_3，由 A_3 脉冲到相集 N_2 上一点 A_0. 见图 29.

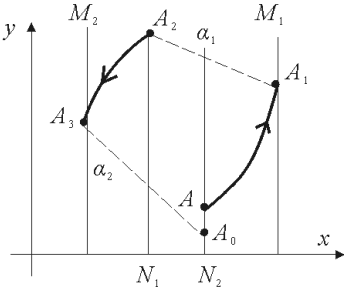


图 29 双边控制系统

定义 12 双边控制系统(19)的轨线段：如上所述，称 $AA_1A_2A_3A_0$ 为双边控制系统(19)的轨线段.

定义 13 双边控制系统(19)的后继点与后继函数：相集N_1上定义坐标系，点 A 坐标为 a，点A_0坐标为a_0，A 的后继点为 A_0，有后继函数$f_2(a_1,a_2,A)=a_0-a$.

注：双边控制系统(19)有两个脉冲集 M_1 和 M_2，也有两个相集 N_1 和 N_2.

“双边控制系统”周期解存在性：设双边控制系统(19)中的常微分方程在相平面的区域$h_1<x<h_2$中不存在奇点，且在相集N_2存在两点 A 和 B，在相集N_2上建立坐标系，并设 A 的坐标为 a，B 的坐标为 b.

定理 10 若点 A 和点 B 的后继函数分别有：

$$f_2(\alpha_1,\alpha_2,A)=a_0-a<0,\ f_2(\alpha_1,\alpha_2,B)=b_0-b>0,$$

则“双边控制系统”(19)在区域$h_1<x<h_2$内存在周期解.

关于“双边控制系统”的研究，我们还是刚开始，许多问题还尚未仔细考虑，理论上也很不完整，尚待努力.“双边控制系统”的应用背景我们只是从养鱼问题开始，在实际生活中，还有许多问题涉及双边控制的研究.

例如在畜牧业中，为了扩大人们的生活需求，要考虑发展畜牧业发展问题，但在畜牧业生产发展

的同时还须考虑草原生态保护问题，要防止过度放牧，使草原生态受到破坏.

又如在经济方面，有关双边控制的问题更多. 例如，商品的产量与价格之间有着密切的联系：商品产量高，市场价格就低；反之，产量低，价格就高. 为了稳定市场价格，就要控制产量，不能太高也不能太低，这就涉及“双边控制系统”的问题. 有个特别的例子：我国的粮食价格十分稳定，产量高，收成好，国家原价收购、储存，使农民丰产得丰收，收益于农民，又不影响市场价格；当粮食减产时，国家投放库存粮食，稳定市场价格，造福于人民，这就是一个很好的“双边控制系统”.

参考文献

[1]Laksbmikantham V, Bainov D, Simeonov P. Theory of impulsive differential equations[M]. Singaporfe: World Scientific, 1989.

[2]Tang S, Chen L. Density-dependent birth rate, birth pulses and their population dynamic consequences[J]. Journal of Mathematical Biology, 2002, 44(2): 185-199.

[3]张弘，陈兰荪. 种群动力学与害虫治理[J]. 科学观察，2012，6：52-53.

[4]Lu Z H, Chen L. The effect of constant and pulse vaccination on SIR epidemic model with horizontal and vertical transmission[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2002, 129: 481-499.

[5]Tang S, Chen L. Global attractivity in a “food-limited” population model with impulsive effects[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 292(1): 211-221.

[6]Tang S, Chen L. The periodic predator-prey Lotka-Volterra model with impulsive effect[J]. Journal of Mechanics in Medicine and Biology, 2002, 2(3): 1-30.

[7]Zhang H, Chen L, Nieto J J. A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2008, 9(4): 1714-1726.

[8]Liu B, Teng Z, Chen L. Analysis of a predator-prey model with Holling II functional response concerning impulsive control strategy[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 193(1): 347-362.

[9]桂占吉，王凯华，陈兰荪. 病虫害防治的数学理论与计算[M]. 北京：科学出版社，2014.

[10]Zhang S, Tan D, Chen L. Chaotic behavior of a chemostat model with Beddington-DeAngelis functional response and periodically impulsive invasion chaos[J]. Solitons & Fractals, 2006, 29(2): 474-482.

[11]Pang G, Chen L. A delayed SIRS epidemic model with pulse vaccination[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 34 (5): 1629-1635.

[12]Liu X, Chen L. Global attractivity of positive periodic solutions for nonlinear impulsive systems[J]. Nonlinear Analysis, 2006, 65(10): 1843-1857.

[13]Gao S, Chen L, Nieto J J, et al. Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence [J]. Vaccine, 2006, 24(35-36): 6037-6045.

[14]陈兰荪，孟新柱，焦建军. 生物动力学[M]. 北京：科学出版社，2009.

[15]Dong L, Chen L, Sun L, et al. Ultimate behavior of predator-prey system with constant harvesting of the prey impulsively[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2006, 22(1): 149-158.

[16]Liu Z, Chen L. Periodic solution of a two-species competitive system with toxicant and birth pulse[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 32(5): 1703-1712.

[17]Meng X, Chen L, Cheng H. Two profitless delays for the SEIRS epidemic disease model with nonlinear incidence and pulse vaccination[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 186(1): 516-529.

[18]Sun S, Chen L. Existence of positive periodic solution of an impulsive delay Logistic model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 184(2): 617-623.

[19]Wang L, Liu Z, Jing H, et al. Impulsive diffusion in single species modell[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 33 (4): 1213-1219.

[20]Wang F, Hao C, Chen L. Bifurcation and chaos in a Monod type food chain chemostat with pulsed input and washoutl[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31(4): 826-839.

[21]Liu K, Chen L. Harvesting control for a stage-structured predator-prey modelwith Ivlev′s functional response and impulsive stocking on preyl[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2007, 1: 1-15.

[22]Shi R, Chen L. Stage-structured impulsive SI model for pest management[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2007, 2007: 1-11.

[23]Zhao Z, Li Y, Chen L. Bifurcation and chaos of biochemical reaction model with impulsive perturbations[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 63(4): 521-535.

[24]陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2017.

[25]叶彦谦, 等. 极限环论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.

[26]陈兰荪. 害虫治理与半连续动力系统几何理论[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2011, 12: 1-9.

[27]陈兰荪. “半连续动力系统”理论及应用[J]. 玉林师范学院学报, 2013, 34(2): 2-10.

[28]Wang T, Chen L. Nonlinear analysis of a microbial pesticide model with impulsive state feedback control[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 65(1-2): 1-10.

[29]Chen L, Liang X, Pei Y. The periodic solutions of the impulsive state feedback dynamical system[J]. Communications in Mathematical Biology and Neuroscience, 2018, Article ID 14.

[30]Tian Y, Chen L, Kasperski A. Modelling and simulation of a continuous process with feedback control and pulse feeding[J]. Computers & Chemical Engineering, 2010, 34(6): 976-984.

[31]Guo H, Chen L. Qualitative analysis of a variable yield chemostat with impulsive state feedback control[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2009, 28(4): 299-309.

[32]Zhao Z, Wang T, Chen L. Dynamic analysis of a turbidostat model with the feedback control[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(4): 1028-1035.

[33]Wang T, Chen L. Nonlinear analysis of a microbial pesticide model with impulsive state feedback control[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 65(1-2): 1-10.

[34]Tian Y, Sun K, Chen L. Studies on the dynamics of a continuous bioprocess with impulsive state feedback control[J]. Chemical Engineering Journal, 2010, 157(2-3): 558-567.

[35]Li Z, Chen L, Liu Z. Periodic solution of a chemostat model with variable yield and impulsive state feedback control[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(3): 443-457.

[36]桂占吉, 王凯华, 陈兰荪. 病虫害防治的数学理论与计算[M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[37]Wei C, Chen L. Heteroclinic bifurcations of a prey-predator fishery model with impulsive harvesting[J]. International Journal of Biomathematics, 2013, 6(5): ID 1350031 (15 pages).

[38]Zeng G, Chen L, Sun L. Existence of periodic solution of order one of planar impulsive autonomous system[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 186(2): 466-481.

[39]Huang M, Liu S, Song X, et al. Periodic solutions and homoclinic bifurcation of a predator-prey system with two types of Harvesting[J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 73(1-2): 815-826.

[40]Zhang H, Jiao J, Chen L. Pest management through continuous and impulsive control strategies[J]. Biosystems, 2007, 90(2): 350-361.

[41]Wei C, Chen L. Periodic solution of prey-predator model with beddington-DeAngelis functional response and impulsive state feedback control[J]. Journal of Applied Mathematics, 2012, Article ID 607105.

[42]Huang M, Liu S, Song X, et al. Periodic solutions and homoclinic bifurcation of a predator-prey system with two types of Harvesting[J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 73(1-2): 815-826.

[43]Dai C, Zhao M, Chen L. Homoclinic impulsive state feedback control of cheese Whey fermentation[J]. International Journal of Biomathematics, 2012, 5(6), ID 1250059 (19 pages).

[44]Pang G, Chen L. Periodic solution of the system with impulsive state feedback control[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 78(1): 743-753.

[45]Wei C, Chen L. Heteroclinic bifurcations of a prey-predator fishery model with impulsive harvesting[J]. International Journal of Biomathematics, 2013, 6(5), ID 1350031 (15 pages).

[46]Wei C, Chen L. Homoclinic bifurcation of prey-predator model with impulsive state feedback control[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 237(3): 282-292.

[47]Wei C, Chen L. Periodic solution and heteroclinic bifurcation in a predator-prey system with Allee effect and impulsive harvesting[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 76(2): 1109-1117.

[48]Deng M, Xue Yi. Statistical Analysis of "Small Profits, Quick Returns"[J]. Mathematical Modeling and Its

Applications, 2020, 9(1): 67-71.

[49]Guo H, Song X, Chen L. Qualitative analysis of a korean pine forest model with impulsive thinning measure[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 234(2): 203-213.

[50]Ji X, Yuan S, Chen L. A pest control model with state-dependent impulses[J]. International Journal of Biomathematics, 2015, 8(1), ID 1550009 (12 pages).

[51]Pang G, Chen L, Xu W, et al. A stage structure pest management model with impulsive state feedback control[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 23(1-3): 78-88.

[52]Guo H, Chen L, Song X. Geometric properties of solution of a cylindrical dynamic system with impulsive state feedback control[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2015, 15(1): 98-111.

[53]Guo H, Chen L, Song X. Qualitative analysis of impulsive state feedback control to an algae-fish system with bistable property[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 271(4): 905-922.

[54]Xu W, Chen L, Chen S, et al. An impulsive state feedback control model for releasing white-headed langurs in captive to the wild[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016, 34(2): 199-209.

[55]Sun M, Liu Y, Liu S, et al. A novel method for analyzing the stability of periodic solution of impulsive state feedback model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 273(2): 425-434.

[56]Zhang M, Song G, Chen L. A state feedback impulse model for computer worm control[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85: 1561-1569.

[57]Liu Q, Huang L, Chen L. A pest management model with state feedback control[J]. Advances in Difference Equations, 2016, 2016: 292.

[58]Chen S, Xu W, Chen L, et al. A White-headed langurs impulsive state feedback control model with sparse effect and continuous delay[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2017, 50: 88-102.

[59]Zhang M, Chen L, Li Z. Homoclinic bifurcation of a state feedback impulsive controlled prey-predator system with Holling-II functional response[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 98: 929-942. DOI: 10.1007/s 11071-019- 052 35-8.

[60]Zhang M, Zhao Y, Chen L, et al. State feedback impulsive modeling and dynamic analysis of ecological balance in aquaculture water with nutritional utilization rate[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 373: 17.

[61]Fu J, Chen L. Modelling and qualitative analysis of water hyacinth ecological system with two state-dependent impulse controls[J]. Complexity, 2018, 2018: 1-16.

[62]Liu Q, Zhang M, Chen L. State feedback impulsive therapy to SIS model of animal infectious diseases[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2019, 516: 222-232.

[63]陈兰荪, 王明淑. 二次系统极限环的相对位置与个数[J]. 数学学报, 1979, 22(6): 751-758.

[64]Zhang M, Liu K, Chen L, et al. State feedback impulsive control of computer worm and virus with saturated incidence[J]. Mathematical Biosciences & Engineering, 2018, 15(6): 1465-1478.

[65]Huang M, Chen L, Song X. Stability of a convex order one periodic solution of unilateral asymptotic type[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 90(2): 1-11. DOI: 10.1007/s11071-017-3647-2.

Modeling of Integrated Pest Control Drives the Rise of "Semi-continuous Dynamical System Theory"

CHEN Lansun[1,2], CHENG Huidong[3]

(1.Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
2.Minnan University of Science and Technology, Quanzhou, Fujian 362332, China;
3.College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: Inspired by the mathematical model of integrated pest control, a series of studies on some related problems of biological mathematics were carried out. Starting from actual problems, we have established the "ordinary differential equation model" and the corresponding "periodic impulse control model" respectively; with the rise of the normalized management of integrated pest control and the normalized control of environmental pollution, we established the "state impulse feedback control system" model, referred to as "semi-continuous dynamic system model, put forward the related concept of "semi-continuous dynamic system", created the basic theory, and made a systemic research, for example: the

periodic solution of continuous dynamic system and the stability of periodic solutions, homoclinic orbits and homoclinic branches, heteroclinic orbits and heteroclinic branches, and different concepts such as "bilateral control system" and its decision theorem research; the corresponding theory and method of "semi-continuous dynamical system" are further applied to some related problems in other aspects of biomathematics. Based on the mathematical model, this paper summarizes the research process of biomathematics in recent ten years, and points out the problems to be solved in the current research.

Key words: mathematical model; integrated pest control; impulsive state feedback control system; periodic solution; stability; homoclinic orbit; homoclinic bifurcations

作者简介

陈兰荪(1938—)，男，中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所研究员，博士生导师. 从20世纪的80年代初开始从事生物数学研究，作为我国生物数学研究的开创者与组织者，在国内外享有崇高的声誉，被美国许多学者称为“中国生物数学之父”，1992年被授予国家有突出贡献专家称号，获政府特殊津贴. 曾任大连理工大学“海天学者”特聘教授、中国数学会生物数学学会理事长. 现任闽南科技学院名誉院长、中国数学会生物数学学会名誉理事长. 1986年至今担任《生物数学学报》主编；2008年至今担任《International Journal of Biomathematics》杂志主编(新加坡世界出版社出版，SCI检索杂志)；2002年《数学辞海》第四卷(应用数学卷)副主编、“生物数学”分支学科主编；2008年至今担任《生物数学丛书》主编，科学出版社出版，2008年开始，已出版23本；2014年至今担任《Communications in Mathematical Biology and Neuroscience》(英国SCIK出版公司出版)杂志主编. 2002年主持召开了“国际数学家大会生物数学卫星会议”，主编了“Advances in Mathematical Biology”，Discrete and Continuous Dynamical Systems：Series B，4(3)，2004(21届国际数学家大会生物数学卫星会议论文集)(SCI检索)；2008年，主编了“Advanced Topics in Biomathematics，Proceedings of the International Conference on Mathematical Biology”，Hangzhou，1997(新加坡世界科学出版社出版). 主要研究方向：数学生态学模型、分子作用动力学模型以及传染病数学模型. 在国内外刊物上发表论文440余篇，其中320余篇被SCI检索，单篇最高引用率达300余次. 1980年获江苏省科技进步一等奖，2013年获教育部自然科学奖二等奖，2014年获浙江省自然科学奖一等奖.

程惠东(1964—)，女，教授，校教学名师，主要从事生物数学和数学教学的研究，发表科研论文50多篇，其中被SCI检索22篇，指导大学生参加数学建模竞赛获全国一等奖，多次获省一等奖等.