

文章编号: 1009-4822(2011)01-0001-09

害虫治理与半连续动力系统几何理论

陈兰荪^{1 2}

(1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080; 2. 福建师范大学闽南科技学院, 福建 泉州 362332)

摘要: 从害虫治理的实际问题出发, 建立了一类脉冲状态反馈控制害虫的防治模型. 提出了半连续动力系统几何理论, 并应用这一理论证明了该模型至少存在一个阶 1 周期解. 结合具体实例, 介绍了阶 1 同宿分支和脉冲环面动力系统的基本理论与分析方法.

关键词: 半连续动力系统; 脉冲微分方程; 害虫治理; 阶 1 周期解

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A

Pest Control and Geometric Theory of Semi-Continuous Dynamical System

CHEN Lan-sun^{1 2}

(1. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China;
2. Minnan Science and Technology Institute, Fujian Normal University, Quanzhou 362332, China)

Abstract: Starting from practical problem of the pest control, a class of pest prevention model with impulsive feedback control is established. The geometric theory of semi-continuous dynamical systems is presented, and by applying this theory, it is proved for this model to have at least one order-one periodic solution. With the specific instance, the basic theory and analyzing method of the order-one homoclinic bifurcation and pulse torus power system are introduced.

Key words: semi-continuous dynamical systems; impulsive differential equations; pest control; order-one periodic solution

1 引 言

应用数学模型的方法来研究生物种群管理决策, 我们从早期文献 [1-4] 中就可以看到, 特别是关于投放农药灭害虫的模型, 最为经典、最为简单的模型是以下阶段结构模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ay - bx - \alpha x, \\ \frac{dy}{dt} = cx - dy - \beta y, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中: x , y 分别表示害虫的幼虫和成虫的密度; a 表示单位时间幼虫的出生率; b 表示幼虫的自然死亡率和单位时间由幼虫成长成成虫的成长率之和; c 表示在单位时间由幼虫成长为成虫的成长率; d 表示成虫的

收稿日期: 2010-10-14

作者简介: 陈兰荪(1938-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事生物数学研究.

自然死亡率; α 表示喷洒农药对幼虫的杀死率; β 表示喷洒农药对成虫的杀死率.

系统(1.1) 当 $\alpha = \beta = 0$ 时的定性相图有两种可能, 见图 1a)、b) .

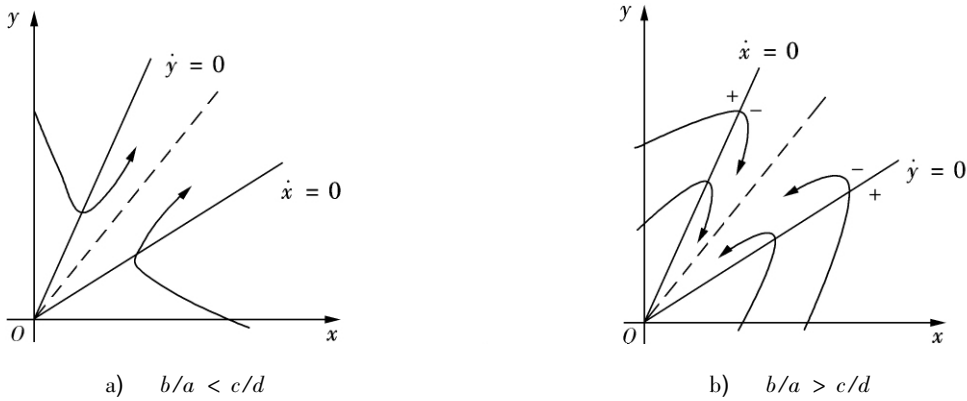


图1 系统(1.1) 在 $\alpha = \beta = 0$ 时的定性相图

Fig.1 Qualitative phase diagram of system(1.1) at $\alpha = \beta = 0$

图 1a) 说明: 当害虫的出生率大于死亡率时, 害虫无限增长; 图 1b) 说明: 当害虫的出生率小于死亡率时害虫自动减少趋向于零, 这种情况无需控制. 对于情况图 1a) 我们应用模型(1.1) 选择适当的 α 和 β 使系统由图 1a) 转变成图 1b) 完成了控制. 具体是对

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ay - bx - \alpha x = ay - (b + \alpha)x, \\ \frac{dy}{dt} = cx - (d + \beta)y, \end{cases}$$

选择 α 和 β 使 $\frac{b + \alpha}{a} > \frac{c}{d + \beta}$ 即可达到上述目的, 使害虫趋向灭绝.

以上理论分析是把投放农药看成是连续行为. 然而, 在实际中投放农药是分批进行的, 也就是说杀害虫是一种脉冲行为, 为此我们建立了如下灭害虫的脉冲微分方程模型:

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ay - bx, \\ \frac{dy}{dt} &= cx - dy, \end{aligned} \right\} t \neq k\tau \quad k = 1, 2, 3, \\ \left. \begin{aligned} \Delta x &= x(t^+) - x(t) = -\alpha x, \\ \Delta y &= y(t^+) - y(t) = -\beta y, \end{aligned} \right\} t = k\tau \quad k = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1.2)$$

若无脉冲 ($\tau = 0$) 时, 微分方程的平衡点(0, 0) 为不稳定. 可以选取参数 α, β 使

$$\alpha > 1 - e^{-\lambda_1 \tau} \text{ 或 } \beta > 1 - e^{-\lambda_1 \tau},$$

$\lambda_1 > 0$ 为微分方程(1.2) 的正特征根, 使周期脉冲微分方程的平衡态(0, 0) 为渐近稳定, 害虫灭绝. 然而, 这样的研究结果仍然得不到实际害虫管理人员的认同, 他们在实际害虫管理工作中并不是按照某周期时刻进行投放农药, 而实际中是观察害虫发展到一定程度时才投放农药. 例如, 在农田、森林中设置“监视器”来时刻观察害虫发展的“状态”, 根据这个“状态”的大小来决定是否投放农药, 为此我们又建立了数学模型:

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ay - bx, \\ \frac{dy}{dt} &= cx - dy, \end{aligned} \right\} y < y^*, \\ \left. \begin{aligned} \Delta x &= -\alpha x, \\ \Delta y &= -\beta y, \end{aligned} \right\} y = y^*. \end{cases} \quad (1.3)$$

这就是害虫数量发展的“状态脉冲反馈控制害虫的数学模型”. 这是一个十分简单的模型, 我们要通过这个模型研究害虫的可控性, 研究通过控制后害虫的密度水平以及在某些经济目标下的最优控制策略^[5-6].

2 半连续动力系统基本概念及性质

为研究系统(1.3)及其更一般情况 我们进一步考虑“状态脉冲微分方程” 介绍有关半连续动力系统几何理论的基本知识.

2.1 基本概念

定义 2.1 设状态脉冲微分方程

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \end{aligned} \right\} (x, y) \notin M\{x, y\}, \tag{2.1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta x &= \alpha(x, y), \\ \Delta y &= \beta(x, y), \end{aligned} \right\} (x, y) \in M\{x, y\}.$$

我们把由“状态脉冲微分方程”(2.1)所定义的解映射所构成的“动力学系统”称为半连续动力系统,记为 (Ω, f, φ, M) . 我们规定系统的映射初始点 p 不能在脉冲集上 $p \in \Omega = \mathbb{R}_2^+ \setminus M\{x, y\}$ φ 为连续映射 $\varphi(M) = N$ φ 称为脉冲映射. 这里 $M\{x, y\}$ 和 $N\{x, y\}$ 为 $\mathbb{R}_2^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0\}$ 平面上的直线或曲线, $M\{x, y\}$ 称为脉冲集, $N\{x, y\}$ 称为相集.

定义 2.2 由状态脉冲微分方程(2.1)定义的半连续动力系统 映射 $f(p, t)$ 为 $\Omega \rightarrow \Omega$ 称其为自身映射,它包括两个部分:

1) 微分方程

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \end{aligned} \right. \tag{2.2}$$

初值为 p 的 Poincaré 映射记作 $\pi(p, t)$. 若 $f(p, t) \cap M\{x, y\} = \emptyset$, 则半连续动力系统初值为 p 的映射为 $f(p, t) = \pi(p, t)$. 见图 2.

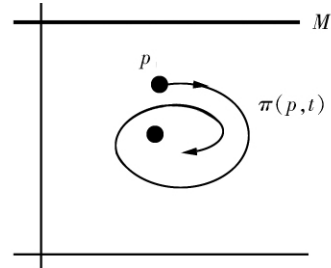


图 2 系统(2.2)的轨线示意图
Fig.2 Path curve schematic diagram of system(2.2)

2) 若存在时刻 T_1 有 $f(p, t) = q_1 \in M\{x, y\}$ 脉冲映射 $\varphi(q_1) = \varphi(f(p, t)) = p_1 \in N\{x, y\}$, 且 $f(p_1, t) \cap M\{x, y\} = \emptyset$ 则半连续动力系统初值为 p 的映射为 $f(p, t) = \pi(p, t) + \pi(p_1, t)$. 见图 3a).

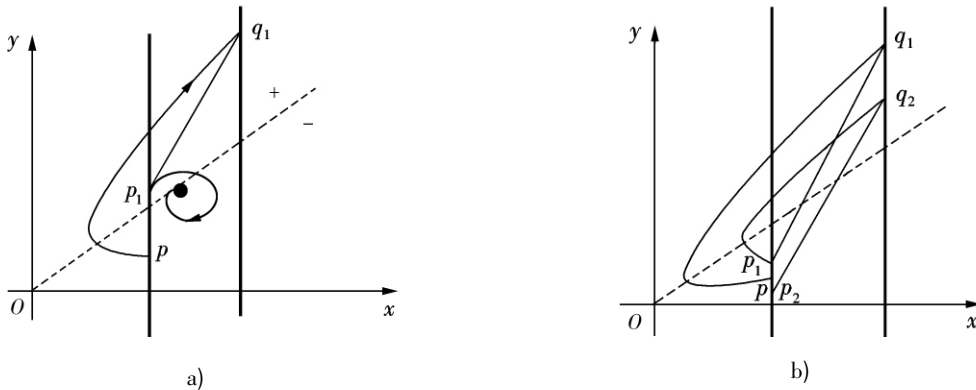


图 3 系统(2.1)映射示意图
Fig.3 Mapping schematic diagram of system(2.1)

注 2.1 在上述 2) 的情况下 若 $f(p_1, t) \cap M\{x, y\} \neq \emptyset$ 存在时刻 T_2 有 $f(p_1, t) = q_2 \in M\{x, y\}$ 则 $f(p, t) = \pi(p, T_1) + f(p_1, t) = \pi(p, T_1) + \pi(p_1, T_2) + f(p_2, t)$.

如图 3 b) 所示.

注 2.2 若 $f(p_1, t) \cap M\{x, y\} \neq \emptyset$ 则重复上面的讨论步骤,类似地有

$$f(p_1, t) = \sum_{i=1}^k \pi(p_{i-1}, T_i) + f(p_k, t), \quad p_0 = p.$$

2.2 半连续动力系统的性质

性质 2.1 由上定义的半连续动力系统 (Ω, f, φ, M) 其映射满足:

- i) $f(p, 0) = p$;
- ii) $f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2)$.

性质 2.2 关于连续动力系统具有性质: $\pi(p, t)$ 对 p 和 t 均连续; 半连续动力系统的映射 $f(p, t)$ 在脉冲时刻不具有对时间 t 的连续性.

性质 2.3 半连续动力系统的映射 $f(p, t)$ 具有性质: $f(p, t)$ 对初始值 p 具有连续性.

2.3 半连续动力系统的周期解

1) 如果微分方程系统(2.2)的周期解值 Γ_0 不与脉冲集 $M\{x, y\}$ 相交, 则 Γ_0 也为半连续动力系统(2.1)的周期解.

2) 阶1周期解. 若相集 N 中存在一点 p , 且存在 T_1 使得 $f(p, T_1) = q_1 \in M\{x, y\}$, 而且脉冲映射 $\varphi(q_1) = \varphi(f(p, T_1)) = p \in N$ 则 $f(p, T_1)$ 称为阶1周期解, 其周期为 T_1 (见图4). 则轨道 $\widehat{pp_1q_1} + \overline{pq_1} = \Gamma_1$ 称为阶1环. 孤立阶1环为阶1极限环. 这里 $\widehat{pp_1q_1}$ 是轨线段, $\overline{pq_1}$ 是直线段.

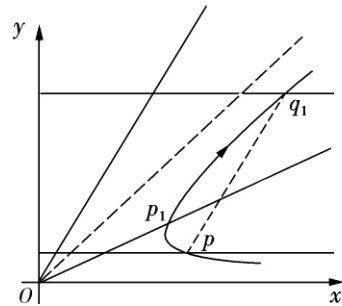


图4 系统(2.1)阶1环示意图
Fig. 4 Order-one ring schematic diagram of system (2.1)

定义 2.3 设 Γ 为阶1周期解(阶1环), Γ 称为是轨道稳定的: 如果对于任何 $\varepsilon > 0$ 在相集上存在点 p 的 δ 邻域 $U(p, \delta)$, $\delta > 0$, 对任意点 $p_1 \in U(p, \delta)$ 和以 p_1 为初始点的半连续动力系统的轨线 $f(p_1, t)$, 存在 T , 当 $t > T$ 时有 $\rho(f(p_1, t), \Gamma) < \varepsilon$.

3) 阶2周期解与阶 k 周期解. 设 $p_1 \in N$ 且存在 T_1 有 $f(p_1, T_1) = q_1 \in M\{x, y\}$, 而且脉冲映射 $\varphi(q_1) = p_2$, 又有 $f(p_2, T_2) = q_2$, $\varphi(q_2) = p_1$, 则轨道 $f(p_1, T_1 + T_2)$ 称为阶2周期解, 其周期为 $T_1 + T_2$ (见图5).

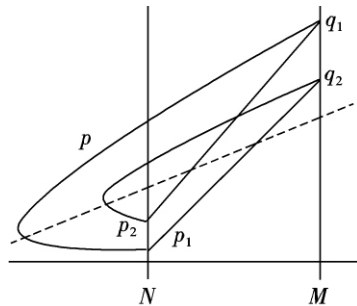


图5 系统(2.1)阶2周期解示意图
Fig. 5 Order two periodic solution schematic diagram of system (2.1)

类似地, 若存在 $p_i \in N$ 和 $T_i (i = 1, 2, \dots, k)$, 使 $f(p_i, T_i) = q_i$, $\varphi(q_i) = p_{i+1} \in N$ 则称轨道 $f(p_1, T_1 + T_2 + \dots + T_k)$ 为阶 k 周期解, 其周期为 $T_1 + T_2 + \dots + T_k$.

4) 状态脉冲微分方程的周期解举例.

考虑

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{array} \right\} \quad x = 0, y > 0, \quad (2.3)$$

$$\Delta y = 2, x = 0, y \leq 0,$$

其解的动力学性态见图6.

系统(2.3)若没有脉冲时, 其解为一系列围绕原点 O 的圆; 图6b) 中 Γ_1 是半径为1的圆; 图6c) 中 Γ_2 是半径为2的圆. Γ_1 和 Γ_2 都是系统(2.3)在没有脉冲时的周期解.

① 阶1周期解的存在性.

在图6b) 中 a 为 b 的相点, ab 轨线 + 脉冲映射 $ba =$ 阶1周期解; 在图6c) 中 O 为 b 的相点, a 为 O 的

相点 μcb 轨线 + 脉冲映射 bO + 脉冲映射 Oa = 阶 1 周期解(虽然脉冲两次,但只包括一条轨线弧段,我们也定义为阶 1 周期解).

② 阶 2 周期解的存在性.

在图 6d) 中 Γ_1 是阶 1 周期解,即半径为 1 的单位圆.我们在 y 轴上任取一点 a ,设点 a 与 Γ_1 的距离为 $\delta < 1$,点 a 的坐标为 $1 + \delta$.过点 a 的以 O 为圆心的圆与负半轴交点 c ,点 c 的坐标为 $-1 - \delta$,点 c 属于脉冲集,其脉冲的相点为 f ,点 f 的坐标为 $1 - \delta$,点 f 不属于脉冲集.过点 f 的以 O 为圆心的圆与负半轴交点 d ,点 d 的坐标为 $-1 + \delta$,点 d 属于脉冲集,其脉冲的相点为 a .这样可见 μabc 轨线 + 脉冲映射 $cf + def$ 轨线 + 脉冲映射 da = 阶 2 周期解.因 δ 是任意的,只要求 $0 < \delta < 1$.因此,我们知 Γ_1 附近充满阶 2 周期解,并且由阶 1 周期解轨道稳定的定义易知, Γ_1 是轨道稳定的,但不是渐近稳定的.

记 $r = k$ 的圆为 Γ_k , $k = 1, 2, 3, \dots$.由图 6e) 易知 $\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_1$,因为从点 $(3, 0)$ 经轨线到点 $(-3, 0)$,再经脉冲到点 $(-1, 0)$,点 $(-1, 0)$ 属于脉冲集,再次脉冲到点 $(1, 0)$,点 $(1, 0)$ 再经轨线到点 $(-1, 0)$,再脉冲到点 $(1, 0)$,停留在阶 1 周期解 Γ_1 上.同样的推理,我们将有

$$\Gamma_{2n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_5 \rightarrow \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_1.$$

类似推理有

$$\Gamma_{2n} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_6 \rightarrow \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_2.$$

进而可知, Γ_{2n} 与 Γ_{2n-1} 之间的解都走向 Γ_1 与 Γ_2 间的阶 2 周期解.图 6f) 中的区域 $G = \{r \leq 2, x \leq 0\}$ 是一个“正向不变集”, G 是一个“吸引子”, G 是全局($x > 0$) 吸引的吸引子.

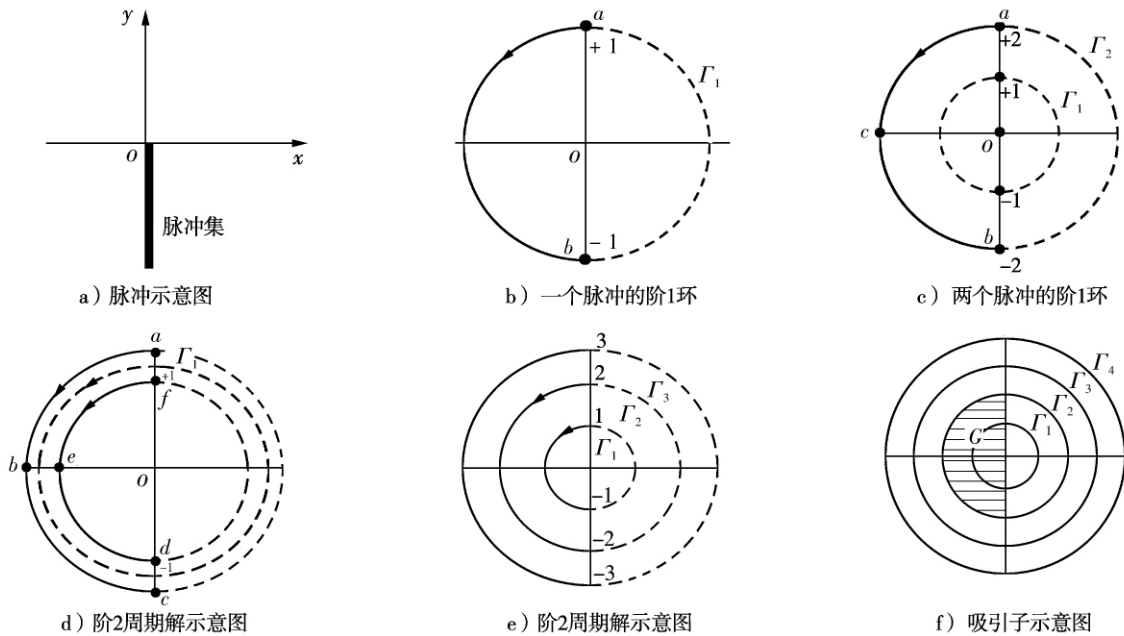


图 6 系统(2.3) 解的动力学性态

Fig.6 Dynamic behaviour of solution of system(2.3)

3 基本定理与应用

3.1 后继函数

我们假设脉冲集 M 和相集 N 均为直线,如图 7 所示.在相集 N 上定义坐标,例如定义 N 与 x 轴的交点 Q 的坐标为 0, N 上任意一点 A 的坐标定义为 A 与 Q 的距离,记为 a .设由点 A 出发的轨线与脉冲集交于一点 C ,点 C 的脉冲相点为点 B 在相集 N 上,坐标为 b .我们定义点 A 的后继点为 B ,点 A 的后继函数为 $F(A) = b - a$.

引理 3.1 后继函数 $F(A)$ 是连续的.

证明 如图 7 所示,有 Poincaré 映射 $\pi(A) \rightarrow C \in M$, $\varphi(C) = B$.由 Poincaré 映射对初值的连续性,

对于任给 $\varepsilon_1 > 0$ 存在 $\delta > 0$ 对于邻域 $U(A, \delta)$ 必存在一点 $A_1 \in U(A, \delta)$ $\varphi(A_1) \rightarrow C_1 \in M$ 只要 $|A_1 - A| < \delta$ 即有 $|C_1 - C| < \varepsilon_1$. 再由脉冲映射 φ 的连续性 对任给 $\varepsilon > 0$ B 的 ε 邻域 $U(B, \varepsilon)$ 内任意一点 $B_1 \in U(B, \varepsilon)$ 因为 $\varphi(C) = B$ 因此必存在点 C 的邻域 $U(C, \delta)$ 在此邻域中存在点 C_2 其相点为 B_2 只要 $|C_2 - C| < \delta$ 即有 $|B_2 - B| < \varepsilon$. 因此 我们有: 对任给 $\varepsilon > 0$ 点 B 的 ε 邻域 $U(B, \varepsilon)$ 内任意一点 B_1 必存在 $\delta(\varepsilon) > 0$ 使得在点 A 的 δ 邻域 $U(A, \delta)$ 内必存在一点 $A_1 \in U(A, \delta)$ 使得 B_1 恰是 A_1 的后继点, 即若 $|A_1 - A| < \delta$ 则有 $|B - B_1| < \varepsilon$.

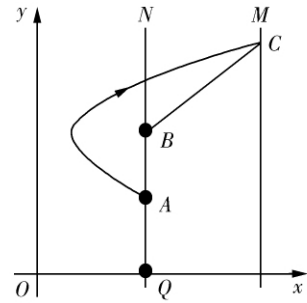


图7 点A的后继点为B示意图
Fig.7 Schematic diagram of successor point B of point A

3.2 后继函数的应用

定理 3.1 有阶2周期解必有阶1周期解.

证明 设系统(2.1)有阶2周期解 AA_1BB_1 , 点A和B在相集N上, 其坐标分别为a和b, 轨线弧 AA_1 与脉冲集M交于点 A_1 , 点B为点 A_1 的相点, 轨线弧 BB_1 与脉冲集M交于点 B_1 , 点A为点 B_1 的相点(见图8). 我们可以看到点B为点A的后继点, 同时点A又是点B的后继点.

我们考察A和B两点的后继函数有

$$F(A) = b - a > 0, F(B) = a - b < 0.$$

由解对初值的连续性和脉冲映射的连续性, 易知后继函数关于初值是连续的. 因此, 在点A与B之间必存在一点C使 $F(C) = 0$, $f(c, t)$ 为阶1周期解.

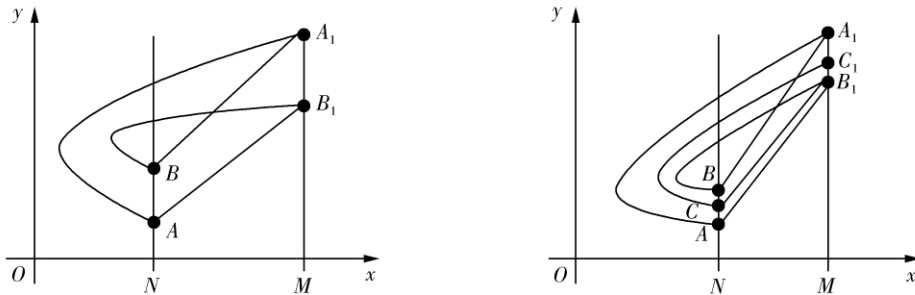


图8 系统(2.1)的阶2周期解示意图
Fig.8 Order two periodic solution schematic diagram of system(2.1)

定理 3.2(Bendixon 定理) 设存在一个单连通且有界闭区域 ABCDA 如图9所示, 其边界AD和BC为系统(2.1)的无切弧, 在其上系统(2.1)所确定的方向场的朝向是指向区域 ABCDA 的内部. 如图9. 区域 ABCDA 的内部与边界上都不存在半连续动力系统(2.1)的平衡点. 区域 ABCDA 的一个边界CD为系统(2.1)的脉冲集, 其相应的相集包含在AB之内 $\varphi(CD) \subset AB$. AB也为系统(2.1)的无切弧, 在其上系统(2.1)所确定的方向场的朝向是指向区域 ABCDA 的内部. 则在区域 ABCDA 的内部至少存在一个半连续动力系统(2.1)的阶1周期解.

证明 记 ABCDA 为 G, 其边界无切弧 AD 记为 Γ_1 , 其边界无切弧 BD 记为 Γ_2 . 考察以A为初始点系统(2.1)的轨线 $f(A, t)$, 当t增加时轨线 $f(A, t)$ 必进入区域G, 而且当t继续增大时, 因为边界 Γ_1, Γ_2 和相集AB都是无切弧, 而且系统(2.1)的向量指向是由外指向G的内部, 又G内不含平衡点, 所以当t增大时 $f(A, t)$ 既不能通过 Γ_1, Γ_2 或相集AB走出区域G, 也不能停留在G内, 所以 $f(A, t)$ 必与脉冲集CD相交于一点 \bar{A} , 设点 \bar{A} 的相点为 A_1 , 则必有 $A_1 \in AB$. 如果 $A_1 = A$ 则为阶1周期解; 如果 $A_1 \neq A$, 我们在相集上以A为起点建立坐标, 设点A的

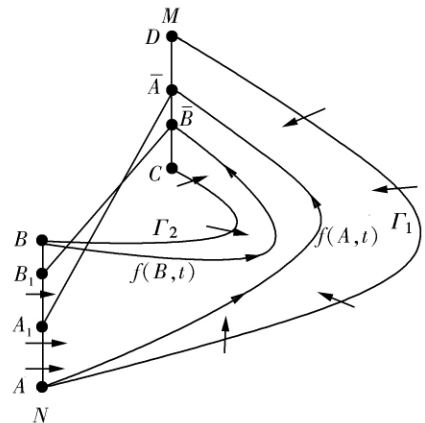


图9 系统(2.1)环域构成
Fig.9 Ring domain organization of system(2.1)

坐标为 0 其他点以其与点 A 的距离为坐标且设为 $a_1 > 0$ 这样点 A 的后继函数 $F(A) = a_1 > 0$.

类似地, 考察以点 B 为初始点系统 (2.1) 的轨线 $f(B, t)$, 当 t 增加时轨线 $f(B, t)$ 必进入区域 G 而且当 t 继续增大时必将与脉冲集 CD 相交于一点 \bar{B} , 设点 \bar{B} 的相点为 B_1 , 则必有 $B_1 \in AB$. 如果 $B_1 = B$ 则 $f(B, t)$ 为阶 1 周期解; 如果 $B_1 \neq B$ 则点 B 的后继函数 $F(B) = b_1 - b < 0$. 由后继函数的连续性知, 在点 A 与 B 之间必至少存在一点 C 使 $F(C) = 0$, 因此在区域 G 内存在阶 1 周期解 $f(C, t)$.

3.3 Bendixon 定理应用

下面我们应用 Bendixon 定理, 研究脉冲状态反馈控制害虫防治系统 (1.3) 阶 1 周期解的存在性.

定理 3.3 当 $\alpha < \beta$ (即农药对幼虫的杀伤率小于对成虫的杀伤率) 时, 半连续动力系统 (1.3) 至少存在一个阶 1 周期解.

证明 对于系统 (1.3) 我们考虑害虫增率较大的情况, 也就是说害虫的出生率大于其自然死亡率 ($b/a < c/d$). 在这种假设下系统 (1.3) 在相平面 (x, y) 上的相图如图 10: 原点 O 为鞍点, 直线 Ocb 为鞍点分界线, 线段 ab 为脉冲集 $y = y^*$ 上的一部分, 而 b, c 分别为分界线 Ocb 与脉冲集 $y = y^*$ 和相集直线 cd 的交点, a 为等倾线 $dx/dt = 0$ 与脉冲集 $y = y^*$ 的交点, 过此点作垂直于脉冲集的直线 ad 与相集交于一点 d, \bar{a} 为点 a 的相点, \bar{b} 为点 b 的相点. 由 $\alpha < \beta$ 易知点 \bar{b} 在点 c 的右边, 又由 $\alpha > 0$, 易知点 \bar{a} 在点 d 的左边, 由于 cb 为轨线, 由向量场的方向可知, 由 ab, bc, cd, ad 4 线段所围成的单连通区域 G 为一个 Bendixon 区域, cb 为系统 (1.3) 的轨线, cd 和 ad 为系统 (1.3) 的无切直线, 方向场的方向都是由外指向 G 的内部. 于是, 由 Bendixon 定理知, 在 G 内至少存在一个系统 (1.3) 的阶 1 周期解.

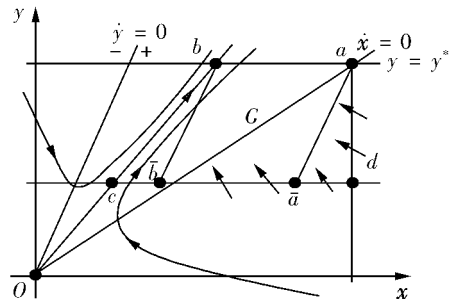


图 10 系统 (1.3) 环域构成
Fig. 10 Ring domain organization of system (1.3)

4 半连续动力系统的阶 1 奇异环(同宿轨)

定义 4.1 所谓阶 1 奇异环是指阶 1 环上有奇点(即阶 1 环上的 Poincaré 映射的 α 极限集与 ω 极限集仅是同一奇点 A).

作为阶 1 奇异环的例子, 我们考虑状态脉冲系统

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{aligned} \right\} x < x_1, \\ \left. \begin{aligned} \Delta x = -\alpha x, \\ \Delta y = -\beta y, \end{aligned} \right\} x = x_1. \end{cases} \quad (4.1)$$

求式 (4.1) 的通积分得

$$\begin{cases} (x - y)(x + y) = c, & x < x_1, \\ \left. \begin{aligned} \Delta x = -\alpha x, \\ \Delta y = -\beta y, \end{aligned} \right\} x = x_1. \end{cases} \quad (4.2)$$

系统 (4.2) 的解曲线如图 11 所示: 点 O(0, 0) 为鞍点, 直线 Ou 和 Ov 为两条鞍点分界线, 垂直线 M 和 N 分别为脉冲集和相集, 其方程分别为

$$M: x = x_1, \quad N: x = (1 - \alpha)x_1.$$

易知, 对于任何给定 x_1 和 α , M 和 N 的位置是确定的, 也就是说它们与两分界线的交点 A 和 B 的位置是确定的. 显然, 我们可以适当地选取 β , 使点 B 恰好为点 A 的相点, 这样形成的三角形 OAB 就是阶 1 周期解, 其内部有奇点 O, 我们称之为阶 1 奇异环. 因为轨线 AO 以点 O 为 α 极限点, BO 以点 O 为 ω 极限点, 所以我们

称之为阶1同宿轨. 这与图12连续动力系统同宿轨(环)类似.

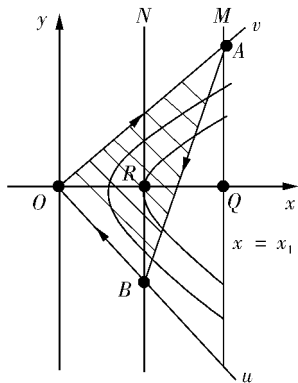


图11 半连续动力系统的同宿轨

Fig.11 Homoclinic orbit of semi-continuous dynamical system

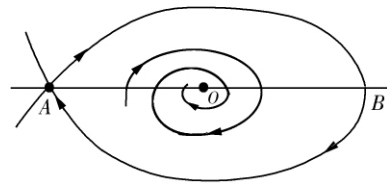


图12 连续动力系统的同宿轨

Fig.12 Homoclinic orbit of continuous dynamical system

5 阶1同宿环分支

考虑扰动系统

$$\begin{cases} (x-y)(x+y) = c, x < x_1, \\ \Delta x = -\alpha x, \\ \Delta y = -(\beta - \varepsilon)y, \end{cases} \quad x = x_1. \quad (5.1)$$

我们看到系统(5.1)为系统(4.2)的脉冲函数作了小扰动. 在未扰动时,脉冲集 AA_1 线段的相集为 BB_1 线段,点A的相点为点B,点 A_1 的相点为点 B_1 . 扰动后脉冲集 AA_1 线段的相集为 $\bar{B}\bar{B}_1$ 线段;扰动后原阶1同宿环破裂,不再存在阶1同宿环,但由向量场知道(如图13) $AOBB_1A_1A$ 构成一个 Bendixon 区域 G . 因为 OA 和 OB 是轨线, AA_1 为脉冲集, B_1A_1 和 B_1B 为无切直线,其上向量场的方向均由 G 外指向 G 内, G 内部无奇点, $\varphi(AA_1) = B_1\bar{B} \subset B_1B$,因此在 G 内至少存在一个阶1周期解.

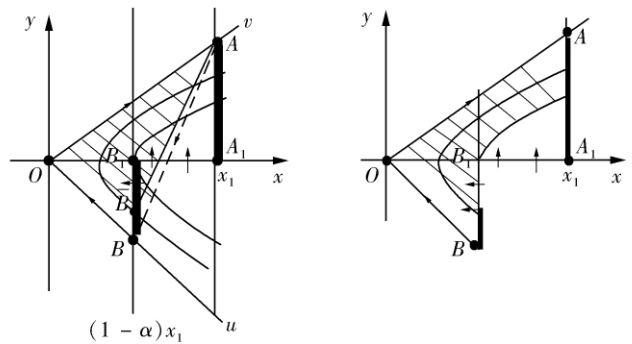


图13 系统(5.1) Bendixon 区域

Fig.13 Bendixon region of system(5.1)

6 脉冲环面动力系统

设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 参数 $\delta \geq 0, r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 考虑状态脉冲系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \delta x, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad r < 2, \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} \Delta r = -1, \\ \Delta\theta = 0, \end{cases} \quad r = 2.$$

当 $\delta = 0$ 时,系统(6.1)在 $r < 2$ 内为一系列圆,原点 O 为中心;当 $2 > \delta > 0$ 时,原点 O 为不稳定焦点. 考虑初始点 M 在半径为1的圆 $\Gamma_2 \rightarrow r = 1$ 上,系统(6.1)的轨线由于原点 O 为不稳定焦点,轨线必围绕 $r = 1$ 的圆旋转且最终与 $r = 2$ 的圆相交于一点 N ,因为 $r = 2$ 是脉冲集,所以由 N 又脉冲到 $r = 1$ 的单位圆上一点 N_1 ,由点 N_1 起始的轨线又将围绕 $r = 1$ 的圆旋转最终与 $r = 2$ 的圆相交于一点 N_2 ,如此的往复程序

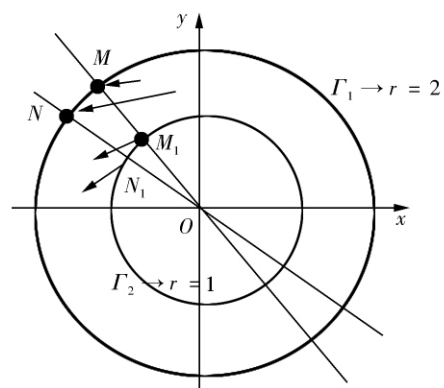


图14 系统(6.1) Bendixon 区域

Fig.14 Bendixon region of system(6.1)

会不断继续下去, 结论会有两种可能: 1) 经过有限次后成了周期轨道 $N_k = N_{k+1}$, 存在 k 阶周期解; 2) 这种程序会无限次的继续下去, 成为遍历现象. 取 $t \in [0, 40]$, $\delta = 0.7$, $r(0) = 1$, $\theta(0) = 1$, 结果具有环面动力系统的特性(见图 15 和图 16).

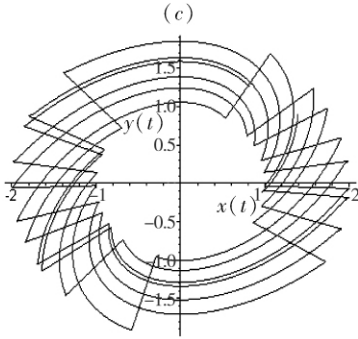


图 15 系统(6.1)的 k 阶周期解
Fig. 15 k order periodic solution of system(6.1)

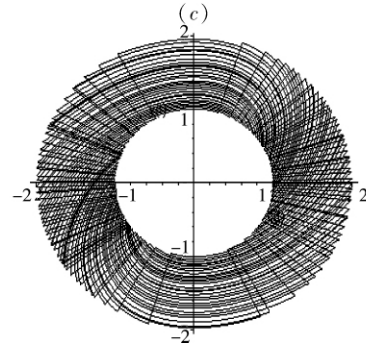


图 16 系统(6.1)的周期解遍历现象
Fig. 16 Ergodic phenomenon of periodic solution of system(6.1)

问题 尽管具有环面的动力系统存在如上两种特性, 但我们还没有办法来判定出现这两种情况的条件是什么? 这有待于有兴趣学者一道来继续探讨.

参考文献:

- [1] Clark C W. Mathematical Bioeconomics: the Optimal Management of Renewable Resources [M]. New York: John Wiley & Sons, 1976.
- [2] Clark C W. Bioeconomic Modeling and Resource Management [C]//Levin S A, Hallam T G, Grose L J eds. Applied Mathematical Ecology, New York: Springer-Verlag, 1989.
- [3] Clark C W. Mathematical Bioeconomics: the Optimal Management of Renewable Resources [M]. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- [4] Goh B S. Management and Analysis of Biological Populations [M]. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1980.
- [5] Bonotto E M. Flows of Characteristic in Impulsive Semidynamical Systems [J]. J. Math Anal Appl 2007, 332: 81-96.
- [6] Bonotto E M. LaSalle's Theorems in Impulsive Semidynamical Systems [J]. Cadernos de Matemática 2008, 9: 157-168.
- [7] Bonotto E M, Federson M. Limit Sets and the Poincaré-Bendixson Theorem in Impulsive Semidynamical Systems [J]. J Differential Equations 2008, 244: 2334-2349.
- [8] Bonotto E M, Federson M. Poisson Stability for Impulsive Semidynamical Systems [J]. Nonlinear Analysis 2009, 71: 148-156.
- [9] Bonotto E M, Federson M. Topological Conjugation and Asymptotic Stability in Impulsive Semidynamical Systems [J]. J Math Anal Appl 2007, 326: 869-881.
- [10] S K Kaul. Stability and Asymptotic Stability in Impulsive Semidynamical Systems [J]. J Appl Math. Stochastic Anal, 1994, 7(4): 509-523.
- [11] S K Kaul. On Impulsive Semidynamical Systems [J]. J Math Anal Appl, 1990, 150(1): 120-128.
- [12] K Ciesielski. On Semicontinuity in Impulsive Systems [J]. Bull Polish Acad Sci Math 2004, 52: 71-80.
- [13] K Ciesielski. On Stability in Impulsive Dynamical Systems [J]. Bull Polish Acad Sci Math 2004, 52: 81-91.
- [14] Zeng G Z, Chen L S, Sun L H. Existence of Periodic Solution of Order One of Planar Impulsive Autonomous System [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics 2006, 186: 466-481.
- [15] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific, 1989.
- [16] Simeonov P S, Bainov D D. Orbital Stability of the Periodic Solutions of Autonomous Systems with Impulse Effect [J]. Int J Systems Sci, 1988, 19(12): 2561-2585.

【责任编辑: 伍 林】